

УДК 519.152

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Матвеев В.В., Титаренко В.Н., Титаренко Д.В.

Рассмотрены существующие модели задачи распределения ресурсов. Предложена модель задачи с двумя группами ограничений. Первую группу составляют ограничения по производственным ресурсам, вторую - ограничения по имеющимся на закупку денежным средствам и существующими ценами на сырье. В зависимости от величины производственных ресурсов и возможностей закупки сырья получено три варианта решения задачи.

Ключевые слова: *экономико-математическое моделирование, задача распределения ресурсов, модель, задача линейного программирования, ограничения, оптимальное решение, сырьевые, производственные ресурсы*

В экономико-математическом моделировании решение задачи оптимального распределения ресурсов имеет важное значение, поскольку от результата ее решения зависит эффективность использования производственных, сырьевых и финансовых ресурсов [1-3]. Эффективность использования ресурсов, - одно из главных условий успешной работы производственно-экономической системы в условиях рыночной экономики.

Цель статьи – анализ существующих моделей задачи распределения ресурсов и построение модели в большей степени соответствующей требованиям решения реальных задач в условиях рыночной экономики.

Известные [1-3] постановки данной задачи можно представить в виде двух различных моделей. Рассмотрим *модель 1* задачи распределения ресурсов, которая в общем виде формулируется [1,4,5] следующим образом:

пусть имеется запас некоторых ресурсов, – вектор $b = \{b_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, из которых можно произвести n видов продукции, – вектор $x = \{x_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, затраты ресурсов на производство единицы каждого вида продукции заданы матрицей удельных затрат $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, произведенную продукцию можно реализовать по ценам $C = \{C_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, суммарная стоимость произведенной продукции составит $F(x, C) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = Cx^T$, требуется имеющиеся ресурсы распределить на выпуск продукции так, чтобы суммарная стоимость произведенной продукции была максимальной.

В данной постановке, (*модель 1*), решение задачи распределения ресурсов сводится к задаче линейного программирования:

$$\text{найти } \max_x F(x) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = Cx^T \text{ при ограничениях} \\ Ax \leq b \quad x \geq 0 \quad (1)$$

В результате решения определяется план выпуска, при реализации которого суммарная стоимость произведенной продукции максимальна.

В [2], [3] рассматривается, назовем её *модель 2*, задача распределения ресурсов в которой, в отличие от *модели 1*, необходимые для производства n – видов продукции сырьевые ресурсы закупаются по ценам $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ на сумму имеющихся денежных средств B .

В данной модели предполагается, что ресурсы и производимая продукция безгранично делимы, и, в такой постановке, задача распределения ресурсов имеет вид:

$$\text{найти } \max_x F(x) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = \sum_{j=1}^n C_jx_j \quad (2)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq v_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m \rho_i v_i \leq B, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x_j \geq 0, v_j \geq 0, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m \quad (5)$$

где C_j – цена продажи единицы i - го вида продукции, a_{ij} – затраты i - го вида сырья на производство единицы j - го вида продукции, ρ_i – цена единицы сырья i - го вида, B – количество денежных средств для закупки сырья, v_i – количество i - го вида сырья, которое необходимо закупить для производства продукции, x_j – количество продукции j -го вида, $F(x)$ – суммарная стоимость произведенной продукции.

В модели 2, искомая оптимальная стратегия содержит две компоненты (V^0, X^0) , где, V^0 – вектор оптимальной закупки сырья, X^0 – вектор оптимального объема выпуска продукции. В силу предположения бесконечной делимости всех видов сырья и продукции [2,3] для оптимальной стратегии (V^0, X^0) все неравенства (3), (4) выполняются как строгие равенства.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = v_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m \rho_i v_i = B \quad j = 1, \dots, n \quad (7)$$

В силу (6), (7) следует

$$\sum_{i=1}^m \rho_i v_i = \sum_{i=1}^m \rho_i \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} X_j \right) = \sum_{j=1}^n \mu_j X_j = B, \quad (8)$$

где $\mu_j = \sum_{i=1}^m \rho_i d_{ij}$, $j = 1, \dots, n$, – стоимость сырья необходимого для производства единицы продукции j - го вида.

Решение задачи состоит в нахождении

$$\max_x F(x) = \sum_{j=1}^n d_j x_j \quad (9)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n \mu_j x_j = B \quad x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (10)$$

Оптимальная стратегия (V^0, X^0) определяется из условия (11)

$$X_j^0 = \begin{cases} 0, & j \neq j_0 \\ \frac{B}{\mu_{j_0}}, & j = j_0 \end{cases} \quad v_i^0 = a_{ij_0} \cdot \frac{B}{\mu_{j_0}} \quad i = 1, \dots, m \quad (11)$$

j_0 – номер оптимального варианта выпуска продукции, который определяется из условия:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \frac{C_j B}{\mu_j} \rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} \frac{C_j}{\mu_j} = \frac{C_{j_0}}{\mu_{j_0}} \quad (12)$$

Согласно модели 2, в оптимальный план производства, попадают один или несколько видов продукции для которых отношение цены продажи единицы продукции к стоимости затрачиваемого

мого сырья принимает максимальное значение: $\max_{1 \leq j \leq n} \frac{C_j}{\mu_j} = \frac{C_{j_0}}{\mu_{j_0}} [2,3]$.

В результате решения задачи определяется план выпуска (одного или нескольких) видов продукции, при реализации которого суммарная стоимость произведенной продукции максимальна, имеющиеся денежные средства используются полностью.

Практическая ценность решения задачи распределения ресурсов в такой постановке (*модель 1, модель 2*), ограничена следующими причинами:

в случае *модели 1*, изначально, должен быть задан вектор ресурсов (сырье, производственные мощности, трудовые ресурсы),

в случае *модели 2*, имеется возможность закупки сырья, при этом не учитываются ограничения на производственные ресурсы, которые часто не могут быть бесконечно делимыми и дополнительно приобретаемыми.

В условиях ограниченности ресурсов, прежде чем планировать производство, необходимо оценить объемы имеющихся производственных ресурсов (производственные площади, мощности технологического оборудования, трудовые ресурсы) и сформулировать для задачи распределения ресурсов соответствующие ограничения.

Рассмотрим (*модель 3*) задачи распределения ресурсов, в которой заданы производственные ресурсы и необходимое сырье может быть закуплено.

Данную модель представим в виде задачи линейного программирования:

$$\text{найти } \max_x F(x) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = Cx^T \quad (13)$$

при ограничениях

$$\text{закупаемое сырье} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{12} + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{12} + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{имеющиеся производственные ресурсы} \begin{cases} a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_{12} + \dots + a_{m+1,n}x_n \leq b_{m+1} \\ a_{m+2,1}x_1 + a_{m+2,2}x_{12} + \dots + a_{m+2,n}x_n \leq b_{m+2} \end{cases} \quad (15)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

где $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор сырьевых ресурсов, закупаемых по ценам $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)$, на сумму

$S_0, \begin{pmatrix} b_{m+1} \\ b_{m+2} \end{pmatrix}$ – вектор имеющихся производственных ресурсов, (в данной задаче, в качестве примера, предполагается использование двух видов производственных ресурсов).

Здесь $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ – нормы затрат i – го вида ресурсов на производство единицы j – го вида продукции.

В задаче (13) – (15), согласно критерию (13), предпочтение дается тем видам продукции, которые имеют более высокую цену реализации C_j , $j = 1, \dots, n$.

При выборе видов продукции, которые следует включить в оптимальный план производства, необходимо учитывать затраты на закупку сырья. Поэтому, для выбора оптимального состава продукции и определения необходимых объемов закупки сырья, применим критерий вида:

$$F(x) = \frac{C_1}{S \cdot A^{<1>}} x_1 + \frac{C_2}{S \cdot A^{<2>}} x_2 + \dots + \frac{C_n}{S \cdot A^{<n>}} x_n \quad (16)$$

где $A^{<i>}$ – вектор-столбец матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ – вектор цен ресурсов, $S \cdot A^{<i>}$ – стоимость сырья приобретаемого по ценам $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ и необходимого для производства единицы продукции i -го вида.

В этом случае целевая функции (16) дает предпочтение видам продукции имеющим более высокий коэффициент рентабельности $\frac{C_i}{S \cdot A^{<i>}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и, очевидно, что в оптимальный план должны входить те виды продукции, для которых, $\frac{C_i}{S \cdot A^{<i>}} \geq 1$. В этом случае затраты на сырье, используемое для выпуска i -го вида продукции, не превышают цены реализации.

Первоначально, для определения объемов закупки сырья, зададим единичный вектор

сырьевых ресурсов $b1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$. Стоимость единичного вектора сырья $S \cdot b1$ должна отвечать

условию $S \cdot b1 \leq S_0$.

Вектор оптимального выпуска продукции при заданном единичном векторе сырья $b1$ определим из решения задачи линейного программирования:
найти

$$\max_x F1(x) = \frac{C_1}{S \cdot A^{<1>}} x_1 + \frac{C_2}{S \cdot A^{<2>}} x_2 + \dots + \frac{C_n}{S \cdot A^{<n>}} x_n \quad (17)$$

$$\text{при} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq 1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq 1 \end{cases} \quad (18)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

Пусть вектор $X1^* = (x1_1^*, x1_2^*, \dots, x1_n^*)$ – решение задачи (17) – (19). Фактически из единич-

ного вектора $b1$ используется $A \cdot X1^*$ сырья ресурсов, причем $A \cdot X1^* \leq b1$, где $b1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Стоимость фактически используемого сырья составит $S \cdot A \cdot X1^{*T}$.

Имеющиеся в количестве S_0 денежные средства позволяют приобрести k “порций” необходимого сырья стоимостью $S \cdot A \cdot X1^{*T}$ каждая:

$$k = \frac{S_0}{S \cdot A \cdot X1^{*T}}$$

Всего на сумму S_0 можно приобрести сырьевых ресурсов

$$\tilde{b}1 = k \cdot A \cdot X1^{*T} = \frac{S_0}{S \cdot A \cdot X1^{*T}} \cdot A \cdot X1^{*T} \quad (20)$$

где $\tilde{b}1 = \begin{pmatrix} \tilde{b}1_1 \\ \tilde{b}1_2 \\ \tilde{b}1_m \end{pmatrix}$ - вектор закупаемых сырьевых ресурсов.

Задача определения оптимального плана выпуска продукции из закупленного сырья $\tilde{b}1$ и имеющихся производственных ресурсов $\begin{pmatrix} b1_{m+1} \\ b1_{m+2} \end{pmatrix}$ формулируется:

найти

$$\max_x F2(x) = C^\delta \cdot x^T = \sum_{i=1}^n C_i^\delta \cdot x_i \quad (21)$$

при

$$\begin{array}{l} \text{Ограничения по} \\ \text{приобретенному} \\ \text{сырью} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \tilde{b}1_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \tilde{b}1_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = \tilde{b}1_m \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\begin{array}{l} \text{Ограничения по имеющимся} \\ \text{производственным} \\ \text{ресурсам} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \dots + a_{m+1,n}x_n \leq b1_{m+1} \\ a_{m+2,1}x_1 + a_{m+2,2}x_2 + \dots + a_{m+2,n}x_n \leq b1_{m+2} \end{array} \right. \quad (23)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

$$C_i^\delta = \begin{pmatrix} C_1^\delta \\ C_2^\delta \\ \dots \\ C_{n1}^\delta \end{pmatrix} - \text{вектор цен реализации выпускаемых видов продукции, компоненты которые}$$

определяются:

$$C_i^{\delta} = \begin{cases} 0, & \text{если } x1_i^* = 0 \\ \frac{C_i}{S \cdot A^{(i)}}, & \text{если } x1_i^* > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (25)$$

Здесь вектор $X1^* = (x1_1^*, x1_2^*, \dots, x1_n^*)$ – решение задачи (17)–(19)

Решение задачи (21-24) существует, при этом возможны три ситуации.

Ситуация 1.

Максимум $F2(X^*)$ достигнут. X^* – вектор оптимального решения задачи (21-24), ограниче-

ние на использование закупаемого сырья $AX^* = \tilde{b}1$ выполняется как строгое равенство, ограничения по производственным ресурсам (или хотя бы по одному из них) выполняются как строгие равенства. Имеющиеся на закупку сырья денежные средства S_0 использованы полностью. Производственные ресурсы используются либо оба полностью, либо один из них имеется в остатке.

Ситуация 2.

Максимум $F2(X^*)$ достигнут. X^* – вектор оптимального решения задачи (21-24), ограниче-

ние на использование закупаемого сырья выполняется как строгое неравенство $AX^* < \tilde{b}1$, вектор остатков ресурсов $\Delta 1 = \tilde{b}1 - AX^*$, производственные ресурсы (один или оба) использованы полностью.

Фактически, денежных средств на закупку сырья, необходимо в количестве

$S_F = S_0 - S \cdot (\tilde{b}1 - AX^*)$, где S – вектор цен ресурсов, $(\tilde{b}1 - AX^*)$ – остатки неиспользованного сырья, образованного из-за исчерпания (одного или обоих) видов производственных ресурсов.

Ситуация 3.

Максимум $F2(X^*)$ достигнут. X^* – вектор оптимального решения задачи (21-24), ограниче-

ние на использование закупаемого сырья выполняются как строгие равенства $AX^* = \tilde{b}1$, ограничения по производственным ресурсам выполняются как строгие неравенства, т.е. имеются неиспользованные производственные ресурсы в объеме

$$\overline{b1_{m+1}} = b1_{m+1} - (a_{m+1,1} \cdot x_1^* + a_{m+1,2} \cdot x_2^* + \dots + a_{m+1,n} \cdot x_n^*) \quad (26)$$

$$\overline{b1_{m+2}} = b1_{m+2} - (a_{m+2,1} \cdot x_1^* + a_{m+2,2} \cdot x_2^* + \dots + a_{m+2,n} \cdot x_n^*) \quad (27)$$

где, $\overline{b1_{m+1}}$, $\overline{b1_{m+2}}$ – остатки неиспользованных производственных ресурсов первого и второго

видов, $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ – компоненты вектора оптимального решения задачи (21) – (24).

Фактические затраты производственных ресурсов при единичном вектора сырьевых ресурсов составляют:

$$\overline{\overline{b1_{m+1}}} = (a_{m+1,1} \cdot x1_1^* + a_{m+1,2} \cdot x1_2^* + \dots + a_{m+1,n} \cdot x1_n^*) \quad (28)$$

$$\overline{\overline{b1_{m+2}}} = (a_{m+2,1} \cdot x1_1^* + a_{m+2,2} \cdot x1_2^* + \dots + a_{m+2,n} \cdot x1_n^*) \quad (29)$$

где $x1_1^*, x1_2^*, \dots, x1_n^*$ координаты вектора $X1^* = (x1_1^*, x1_2^*, \dots, x1_n^*)$ – оптимального решения задачи (17) – (19).

Оставшихся производственных ресурсов $\overline{\overline{b1_{m+1}}}, \overline{\overline{b1_{m+2}}}$, в случае наличия сырья, достаточно

$$k_{m+2} = \frac{\overline{b1_{m+2}}}{b1_{m+2}} \text{ “порций” сырья.}$$
$$k1 = \min\{k_{m+1}, k_{m+2}\}. \quad (30)$$
$$b2 = k1 \cdot A \cdot X1^{*T}, \quad (31)$$

Пусть $k1 = \min\{k_{m+1}, k_{m+2}\}$ и $k1 = k_{m+1}$, тогда оптимальный вектор дополнительно выпускаемой продукции определяется решением задачи:

$$\max_x F2(x) = C^\delta \cdot x^T = \sum_{i=1}^n C_i^\delta \cdot x_i \quad (32)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ограничения по дополнительно} \\ \text{приобретаемому сырью} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b2_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b2_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b2_m \end{array} \right. \quad (33)$$
$$\begin{array}{l} \text{использованию остатка} \\ \text{производственного} \\ \text{ресурса } \overline{b1}_{m+1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \dots + a_{m+1,n}x_n = \overline{b1}_{m+1} \\ a_{m+2,1}x_1 + a_{m+2,2}x_2 + \dots + a_{m+2,n}x_n \leq \overline{b1}_{m+2} \end{array} \right. \quad (34)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (35)$$

Реализация данного варианта решения задачи потребует на закупку сырья общих затрат в сумме

$$S_{обш} = S_0 + S \cdot A \cdot X2^T$$

Общая стоимость произведенной продукции $F_{общ} = F1(X^*) + F2(X2^*)$.

Общий объем выпуска продукции составит $X_{обш.} = X^* + X2^*$.

ВЫВОДЫ

На основании проведенного анализа известных моделей (*модель 1, модель 2*) задачи распределения ресурсов сформулирована *модель 3*.

Предлагаемая модель, в отличие от известных моделей, позволяет решать задачу распределения ресурсов в условиях ограничений, которые формируются на основании имеющихся объемов производственных ресурсов, предоставляемых денежных средств на закупку сырья и известных затратах на закупку единицы сырья каждого вида.

В результате решения задачи определяется максимум стоимости произведенной продукции и в зависимости от объемов производственных ресурсов и денежных средств возможны ситуации:

- денежные средства и производственные ресурсы использованы полностью;
- денежные средства использованы полностью и имеются неиспользованные производственные ресурсы;
- производственные ресурсы использованы полностью, но предоставляемые денежные средства полностью не используются.

Такой подход в большей степени отвечает требованиям решения реальных задач распределения ресурсов в условиях рыночной экономики, позволяет всесторонне анализировать полученные результаты с учетом изменения внешних факторов функционирования модели.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем.- М.: Наука, 1975.-373 с.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций.– М.: Наука, 1971.-382с.
3. Морозов В.В. Исследование операций в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 1986.-373 с.
4. Хэмди А. Таха. Введение в исследование операций. – М., СПб., К.: “Вильямс”, 2001. – 863 с.
5. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. – М.: Факториал Пресс, 2003.- 342 с.