

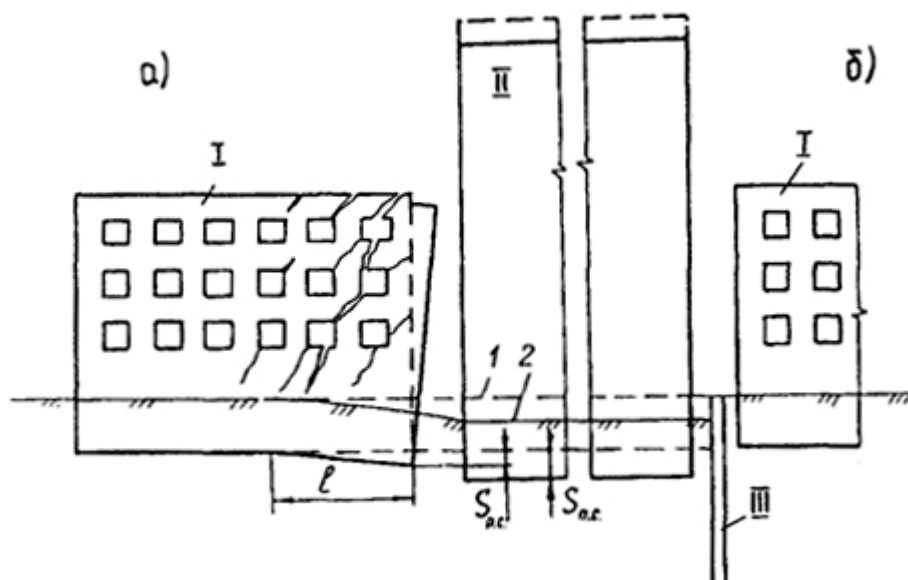


Рис. 2. Общая схема деформаций ранее построенного здания (I) в результате пристройки к нему здания большей этажности (II):

а) - при отсутствии мероприятий, предотвращающих влияние пристройки на ранее построенное здание; б) - при осуществлении этих мероприятий в виде разрезки основания шпунтовой стенкой (III); 1 - поверхность земли до пристройки здания; 2 - поверхность после пристройки; $S_{п.с.}$ - полная осадка основания под смежной стеной ранее построенного здания; $S_{p/c/}$ - полная осадка под смежной стеной пристройки; 1 - участок перегиба

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Пуме. Особенности проектирования многоэтажных зданий на аварийные нагрузки. «Строительная механика и расчет сооружений», 1977, №1.
2. Стругацкий Ю.М. Обеспечение прочности панельных зданий при локальных разрушениях их несущих конструкций. В сб. «Исследования несущих бетонных и железобетонных конструкций сборных многоэтажных зданий», МНИИТЭП, М., 1980.
3. СНиП II-7-81*. Строительство в сейсмических районах. М., 1996.
4. СНиП 2.01.07-85*. Нагрузки и воздействия. М., 1996.

УДК 531.8

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Чувакова А. А., студентка группы ТГВ-201, Литвинова Э. В., ст. преп.

Национальная академия природоохранного и курортного строительства

Рассмотрены классификация принципов классической механики, а также интегральные вариационные принципы механики и их связь с законами Ньютона.

Вариационные принципы, Мопертюи, Гамильтон, Ферма, Лейбниц, Лагранж, Остроградский, Зоммерфельд.

Принципами механики называются исходные положения, отражающие столь общие закономерности механических явлений, что из них как следствия можно получить все уравнения, определяющие движение механической системы (или условия её равновесия). В ходе развития механики был установлен ряд таких принципов, каждый из которых может быть положен в основу механики, что объясняется многообразием свойств и закономерностей механических явлений. Эти принципы подразделяют на невариационные и вариационные.

Невариационные принципы механики непосредственно устанавливают закономерности движения, совершаемого системой под действием приложенных к ней сил. К этим принципам относятся, например, 2-й закон Ньютона, а также принцип Д'Аламбера.

Невариационные принципы справедливы для любой механической системы и имеют сравнительно простое математическое выражение. Однако их применение ограничено только рамками механики, поскольку в выражения принципов непосредственно входит такое чисто механическое понятие, как сила.



Рис. 1. Пьер Луи де Мопертюи
(1698–1759)

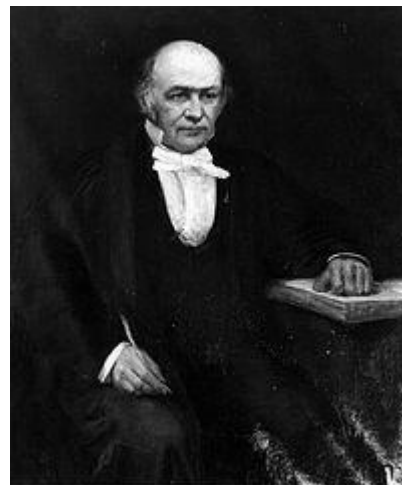


Рис. 2. Уильям Роуэн Гамильтон
(1805–1865)

Интегральные принципы занимают особое положение в механике, претендуя на всеобщую универсальность в описании движения материальных объектов, так как из них могут быть получены все законы механики (эти принципы получили название вариационных).

По форме вариационные принципы разделяют на так называемые дифференциальные, в которых устанавливается, чем истинное движение системы отличается от движений кинематически возможных в каждый данный момент времени, и интегральные, в которых это различие устанавливается для перемещений, совершаемых системой за какой-нибудь конечный промежуток времени.

Дифференциальные вариационные принципы в рамках механики являются более общими и практически справедливы для любых механических систем. Интегральные вариационные принципы в их наиболее употребительном виде справедливы только для так называемых консервативных систем, то есть систем, в которых имеет место закон сохранения механической энергии. Однако в них, в отличие от дифференциальных вариационных принципов и невариационных принципов, вместо сил входит такая физическая величина, как энергия, что позволяет распространить эти принципы на немеханические явления, делая их важными для всей теоретической физики.

К интегральным вариационным принципам механики относятся так называемые принципы наименьшего, или стационарного, действия, согласно которым для данного класса сравниваемых друг с другом движений истинным является то, для которого физическая величина, называемая действием, имеет за время перемещения системы минимум (точнее, экстремум).

Принцип стационарности действия – наиболее важный среди семейства экстремальных принципов. Не все физические системы имеют уравнения движения, которые можно получить из этого принципа, но все фундаментальные взаимодействия ему подчиняются, в связи с чем этот принцип является одним из ключевых положений современной физики.

Первую формулировку принципа дал П. Мопертюи в 1744 году, сразу же указав на его универсальную природу, считая его приложимым к оптике и механике. В принципе Мопертюи–Лагранжа сравниваются движения консервативной системы между двумя данными ее конфигурациями, происходящие с одной и той же начальной кинетической энергией, а под действием понимается определенный интеграл по времени от удвоенной кинетической энергии системы.

В принципе Гамильтона–Остроградского сравниваются движения, происходящие между двумя данными конфигурациями системы за один и тот же промежуток времени, а под действием в простейшем случае понимается определенный интеграл по времени от разности между кинетической и потенциальной энергиями системы.

Принцип наименьшего действия Гамильтона, точнее принцип стационарности действия – способ получения уравнений движения физической системы при помощи поиска стационарного значения специального функционала – действия. Назван в честь Уильяма Гамильтона, использовавшего этот принцип для построения так называемого гамильтонова формализма в классической механике.

Так, по отношению к принципу наименьшего действия Гамильтона А. Зоммерфельд (1868–1951) утверждает, что в нем заключена вся механика.



Рис. 3. Пьер де Ферма
(1601–1665)



Рис. 4. Готфрид
Вильгельм Лейбниц
(1646–1716)



Рис. 5. Арнольд
Зоммерфельд (1868–
1951)

А современные ученые идут еще дальше, расширяя область применения интегральных вариационных принципов не только на все физические науки, такие, как электромагнетизм, термодинамика, теория относительности, квантовая механика и др., но и на теорию управления (кибернетику), биологию, экономику, социологию и т. д. То есть действительно получается, что принцип Гамильтона в его модифицированной форме оказывается универсальным научным принципом. Некоторые ученые считают, что вариационные принципы в физике обнаруживают поразительное богатство философского содержания: “С их помощью в рамках общей теории относительности выражается в специальной форме даже такая основополагающая идея всего материализма, как мысль, что материя существует и что она есть причина самой себя”.

Это очень серьезное утверждение, которое, конечно, вызывает закономерное сомнение. Ряд современных учебников по механике написан с позиций главенства интегральных вариационных принципов.

В связи с изложенным возникает необходимость разобраться с действительной сущностью этих принципов и их местом и ролью в механике и в науке вообще. Для этого рассмотрим кратко историю их возникновения и развития.

Впервые интегральный принцип применительно к оптическим явлениям был введен Ферма в 1662 году. Он назывался принципом кратчайшего времени и математически был представлен в виде интеграла:

$$\int_A^B \frac{ds}{V},$$

где V – скорость распространения света, ds – элемент пути, A и B – начальная и конечная точки движения луча света.

Применительно к механическим явлениям Лейбницем в 1669 году был сформулирован принцип, получивший в дальнейшем название принципа наименьшего действия. Лейбниц утверждал, что при движении тела действие должно быть минимальным или

максимальным. Под действием Лейбниц понимал произведение массы тела, его скорости и длины пройденного пути. Действие могло быть также представлено как произведение живой силы, то есть кинетической энергии, на время. В современной трактовке действие представляется в виде интеграла:

$$S = 2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} T dt ,$$

где S – действие, T – кинетическая энергия, τ_0 и τ_1 – начальное и конечное значения времени.

В 1747 году похожий принцип был опубликован президентом Берлинской академии наук Мопертюи. Он утверждал, что действие, которое может быть представлено в виде

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} mVds ,$$

при движении тел должно быть минимальным, то есть из всех возможных

движений природа выбирает то, при котором цель движения достигается с наименьшей затратой действия. В соответствии с такой формулировкой принцип получил название принципа наименьшего действия.

Из формулировки принципа, данной Мопертюи, вытекает телеологический (целесообразный или целенаправленный) характер принципа наименьшего действия. На стороне Мопертюи выступил Эйлер (1707–1783), который на основании этого принципа разработал вариационное исчисление. Отметим следствия, которые вытекают из принципа Мопертюи.

1. При свободном движении при выполнении закона сохранения энергии следует:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = \delta(\tau_1 - \tau_0) = 0 ,$$

то есть получается, принцип кратчайшего времени Ферма. Здесь символ δ означает вариацию, то есть отклонение или изменение некоторой величины.

2. Для свободной материальной точки вместо $T=\text{const}$ можно взять $V=\text{const}$, тогда получится:

$$\delta \int V d\tau = \delta \int ds = 0 .$$

В этом состоит принцип кратчайшего пути.

Принцип Гамильтона имеет следующую форму:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (T - U) d\tau = 0 ,$$

где T – кинетическая энергия тела, U – его потенциальная энергия. Эта форма справедлива для консервативных систем. Разность энергий называется функцией Лагранжа L , в связи с чем принцип Гамильтона может быть представлен в виде:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} L d\tau = 0 .$$

Покажем, как с помощью закона сохранения энергии можно получить второй закон Ньютона.

При движении подброшенного тела вверх его кинетическая энергия будет уменьшаться, а потенциальная энергия соответственно возрастать, зависимость между которыми для любого момента времени можно представить в виде следующего равенства:

$$T(x) = T_0 - U(x), \quad (1)$$

где T – начальное значение кинетической энергии в момент бросания. Выражение (1) может

быть представлено в виде закона сохранения энергии, справедливого для любого момента движения:

$$T(x) + U(x) = T_0 = \text{const}. \quad (2)$$

В дифференциальной форме выражение (2) будет иметь вид:

$$dT(x) + dU(x) = 0. \quad (3)$$

Поделив каждый член этого выражения на dx , придем к следующему выражению:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad (4)$$

Производную от кинетической энергии можно представить в виде:

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{mV_x^2}{2} \right) = mV_x \frac{dV_x}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dx} = m \frac{dV_x}{d\tau} = ma_x.$$

Производная $\frac{dU(x)}{dx} = -F_x$ также представляет собой силу, взятую с отрицательным знаком.

В результате выражение (4) приведет к виду:

$$ma_x = F_x,$$

представляющему собой второй закон Ньютона.

Как следует из выражения (2) функция $f=T(x)+U(x)$ представляет собой постоянную величину и, поэтому, не имеет ни максимума, ни минимума. Эта функция характеризует закон сохранения энергии.

В книге А. Зоммерфельда (немецкий физик–теоретик и математик) принцип наименьшего действия Мопертюи (и Лейбница тоже):

$$\delta s = 2\delta \int_{\tau_0}^{\tau} T d\tau = 0 \text{ или } \delta W = 0$$

трактуются следующим образом: “...мы сравниваем только траектории с такой же энергией, как энергия рассматриваемой траектории. Тем самым мы утверждаем, что рассматриваемый нами принцип наименьшего действия справедлив только для движений, при которых выполняется закон сохранения энергии, то есть для случая, когда силы имеют потенциал”. Там же: “Если мы рассмотрим частный случай свободного движения, то для него из закона сохранения энергии $T=W$...легко найти:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = \delta(\tau_1 - \tau_0) = 0.$$

Для случая свободной материальной точки можно вместо $T=W$ взять $V=\text{const}$ и написать:

$$\delta \int V d\tau = \delta \int ds = 0.$$

В этом состоит принцип кратчайшего пути, который определяет траекторию свободной материальной точки на кривой поверхности...”.

ВЫВОДЫ

1. Как невариационные, так и вариационные принципы были установлены в процессе изучения свойств механических систем и закономерностей их движения. Поскольку механические явления, как и другие физические, подчинены многим закономерностям, то для соответствующих механических систем оказывается справедливым целый ряд принципов, в том числе и вариационный. Если любой из них принять за исходный, то из него как следствия получаются не только уравнения движения данной системы, но и все другие, справедливые для этой системы, принципы.

2. Содержание вариационных принципов состоит в том, что они устанавливают свойства (признаки), позволяющие отличить истинное, то есть фактически происходящее под действием заданных сил, движение механической системы от тех или иных кинематически возможных её движений (или же состояние равновесия системы от других возможных её состояний). Обычно эти свойства (признаки) состоят в том, что для истинного движения некоторая физическая величина, зависящая от характеристик системы, имеет наименьшее значение по сравнению с её значениями во всех рассматриваемых кинематически возможных движениях.

3. Вариационные принципы могут отличаться друг от друга видом указанной физической величины и особенностями рассматриваемых кинематически возможных движений, а также особенностями самих механических систем, для которых эти принципы справедливы.

4. Применяются вариационные принципы как для составления в наиболее простой форме уравнений движения механических систем, так и для изучения общих свойств этих движений. Использование интегральных вариационных принципов классической механики естественным образом приводит к понятию обобщенных решений и расширению классов функциональных пространств, в которых разыскиваются решения задач математической физики.

Вариационные принципы оказались применимыми не только к дискретным материальным системам, но и к системам с распределёнными параметрами, к сплошным средам; они играют важную роль в теории поля и в математической физике. С вариационными принципами классической механики тесно связаны оптико–механическая аналогия, теория канонических преобразований, теория групп Ли и законы сохранения. Вариационные принципы обладают большой эвристической ценностью, они распространены и на другие области физики, в частности на теорию относительности и на квантовую и волновую механику, где важную роль играют принципы наименьшего действия и связанный с ними лагранжев и гамильтонов математический формализм.

5. Использование вариационных принципов требует применения методов вариационного исчисления. В общем случае требование стационарности лагранжиана даёт систему дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующий спектр начально–краевых задач (уравнения Эйлера). Если общая постановка является трёхмерной, метод Власова даёт возможность снизить размерность задачи, сводя её к двумерной (пример – теория оболочек), к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (пример – теория стержней) или к конечной/бесконечной алгебраической системе уравнений (метод Рэлея–Ритца, метод конечных элементов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Теоретическая механика // Т. 2, пер. с франц. – М., 1960.
2. Вариационные принципы механики // Сб. ст. под ред. Л. С. Полана. – М., 1959.
3. Зоммерфельд А. Механика // РХД. – М., 2001. – 368 с.
4. Ланцош К. Вариационные принципы механики // Пер. с англ. – М., 1965.
5. Парс Л. А. Аналитическая динамика // Пер. с англ. – М., 1971.
6. Розе Н. В. Лекции по аналитической механике, ч. 1. – Л., 1938.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М., 1962.