МЕХАНИКА И СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

УДК 531.8

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Тарабара И.Ю., Перешиткин К.А., студенты группы ПГС–201, Бородачева Т.И., ст. преп.

Национальная академия природоохранного и курортного строительства

Рассмотрены: уравнение колебаний, постановка задачи о колебаниях конечной струны вывод уравнения колебаний струны и пример.

Струна, уравнение колебания, метод Фурье.

Уравнение колебаний. Постановка задачи о колебаниях конечной струны.

Изучение колебаний струны, т.е. тонкой нити, которая в процессе движения не оказывает никакого сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением длины, требует построения математической модели процесса колебаний. В данном случае рассматриваются колебания

1) плоские, т.е. происходящие только в одной плоскости,
2) поперечные, т.е. считается, что точки струны движутся исключительно перпендикулярно положению ее равновесия,
3) малые настолько, что можно пренебречь квадратом тангенса угла наклона касательной, проведенной в каждой точке струны.

Струна, закрепленная на концах, выводится из положения равновесия изменением ее формы или ударом по ней. Целью решения задачи является отыскание функции, описывающей положение каждой точки струны в процессе колебаний в любой момент времени.

Вводится прямоугольная система координат так, что положение равновесия струны совпадает с осью Ox. Искомая функция u смещений точек струны относительно положения равновесия зависит от абсциссы начального положения точки струны и времени: $u = u(x,t)$.

Колебания происходят в плоскости xOu (рис. 1).

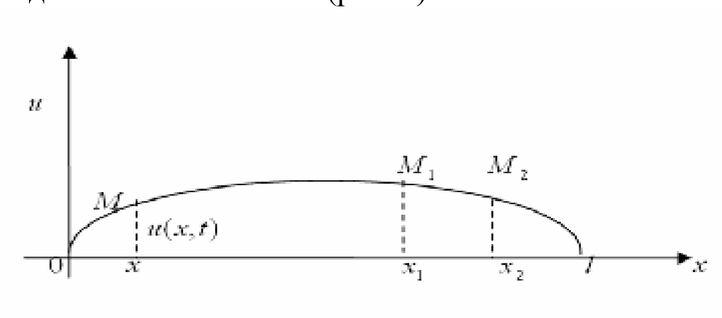

Рисунок 1

Ограничиваясь рассмотрением лишь малых колебаний струны, будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

Вывод уравнения колебаний струны

Рассмотрим участок струны M_1M_2; на него действуют силы натяжения, внешние силы (если заданы), силы сопротивления среды и силы инерции. Силы натяжения направлены по касательным к струне и равны по величине, остальные силы параллельны оси Ou, так как колебания происходят в плоскости xOu и являются поперечными.

Обозначим $\alpha(x)$ угол между касательной к струне в точке с абсциссой x в момент времени t с положительным направлением оси Ox. Построим проекции всех сил, действующих на участок струны M_1M_2, на ось Ou.

1) сумма проекций сил натяжения на ось Ou равна
$T_0 \sin\alpha(x_2) - T_0 \sin\alpha(x_1) = T_0[\alpha(x_2) - \alpha(x_1)]$.

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\cos\alpha} = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x} \text{ (в силу малости колебаний),}$$

$$T_0\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right] = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx .$$

2) Обозначим через $p(x,t)$ распределенные внешние силы, действующие на струну параллельно оси Ou. $\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx$

3) Проекция силы сопротивления среды, действующей на участок струны M_1M_2, на ось Ou будет равна $-\int_{x_1}^{x_2} 2k\frac{\partial u}{\partial t}dx$ (знак минус объясняется «тормозящим» действием этой силы).

4) Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность струны. $-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$

По принципу Даламбера сумма проекций всех сил, действующих на участок струны M_1M_2, на ось Ou должна быть равна нулю:

$$\int_{ч_1}^{ч_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) - 2k\frac{\partial u}{\partial t} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]dx = 0 .$$

Так как точки x_1 и x_2 были выбраны произвольно, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю в каждой точке струны в любой момент времени:

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) - 2k\frac{\partial u}{\partial t} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 .$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial u}{\partial t} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t)$$

- это *уравнение вынужденных колебаний струны с учетом сопротивления среды.*

Если струна однородна, т.е. $\rho(x) = \rho = const$, то получим уравнение колебаний однородной струны: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)$

Если струна однородна, на нее не действуют внешние силы (т.е. колебания не являются вынужденными) и можно пренебречь сопротивлением среды, то из предыдущего уравнения получаем *уравнение свободных колебаний струны*, называемое также *волновым уравнением*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Метод Ферье

Разберем простейшее уравнение, описывающее колебание струны, закрепленной на концах, без воздействия внешних сил.

(1)

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x) \quad (2)$$

и граничных условиях

. (3)

Метод Фурье, или метод разделения переменных основывается на том, что решение ищется в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 (X(x)T(t))}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (X(x)T(t))}{\partial x^2}$$

$$X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = a^2 T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

$$XT'' = a^2 TX''$$

Получено равенство, левая часть которого зависит только от x, а правая часть – только от t. Функции разных переменных могут быть равны между собой только в том случае, если они равны какому то числу, константе, обозначается эта константа $-\lambda$.

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Получены два уравнения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$$

Делая преобразования находим:

$$T(t) = C\cos\left(\sqrt{\lambda}at\right) + D\sin\left(\sqrt{\lambda}at\right)$$

$$T_n(t) = C_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right) + D_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right).$$

Возвращаемся к поставленной задаче :

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_t(t) = \left(C_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right) + D_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right) + D_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

Вывод:

где

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi \quad D_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l u_1(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$$

является решением задачи

Задача 1

Решить задачу о колебании струны (из золота) $0 < x < 1$ с закрепленными концами, если начальные скорости точек равны нулю, внешние силы отсутствуют, а начальное отклонение u_0 имеет форму параболы, осью симметрии которой служит прямая $x = \frac{l}{2}$, а вершиной – точка $M(\frac{l}{2}; h)$

Составим уравнение, описывающее колебание этой струны:

В данном случае:

$$u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x) = 0$$

Начальное отклонение u_0 имеет форму параболы, осью симметрии которой служит прямая $x = \frac{l}{2}$, а вершиной – точка $M(\frac{l}{2}; h)$. Составим уравнение этой параболы. Известно, что эта парабола проходит через три точки: $\left(\frac{l}{2}; h\right), (0;0), (l;0)$, причем $M(\frac{l}{2}; h)$ – её вершина.

Подставим эти координаты в уравнение параболы и найдем уравнение параболы:

$$y = -\frac{4h}{l^2}x^2 + \frac{4h}{l}x$$

$$u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = 0$$

$$u\big|_{t=0} = -\frac{4h}{l^2}x^2 + \frac{4h}{l}x = u_0(x)$$

Представим функцию $u(x;t)$ как произведение двух, $u(x;t) = X(x)T(t)$

Уравнение и его граничные условия в точности соответствуют разобранному материалу в теоретической части, поэтому сразу можно записать решение:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right) + D_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$$

$$D_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l u_1(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$$

Подставим значения u_0 и u_x

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l\left(-\frac{4h}{l^2}\xi^2 + \frac{4h}{l}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$$

Для того, чтобы вычислить этот интеграл нужно дважды воспользоваться формулой интегрирования по частям.

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l\left(-\frac{4h}{l^2}\xi^2 + \frac{4h}{l}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi = -\frac{16h}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{32h}{\pi^3(2k+1)^3}\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}at\right)\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right)$$

$$D_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l u_1(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l 0\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi = 0$$

Поставляем вычисленные коэффициенты:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{16h}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n-1\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{32h}{\pi^3(2k+1)^3}\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}at\right)\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right)$$

Ответ:

Построим график функции. При этом x=const , t – изменяется, l=2 м, h=1 м, a=2,3 (для золота).Возьмем t=0 с, t=1 с, t=2 с, t=3 с. Построим графики:

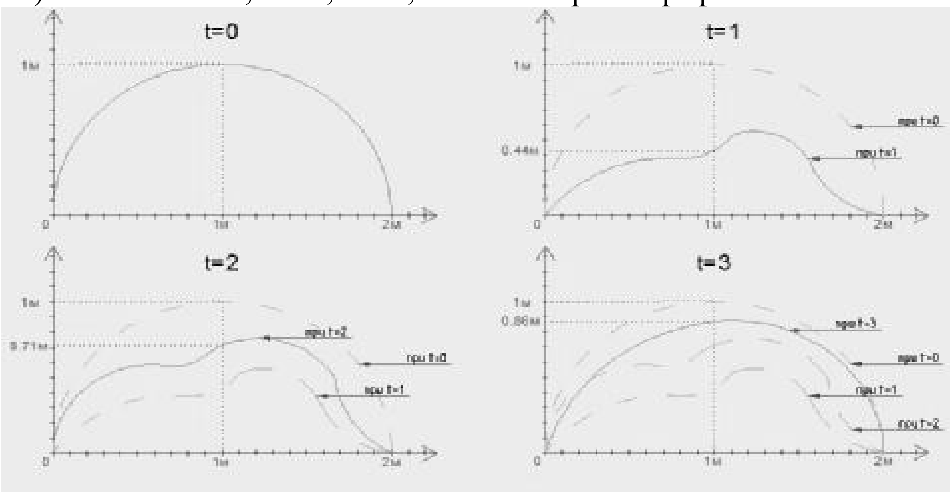

График 1

Задача 2

Задача о нахождении вынужденных колебаний однородной струны , жестко закрепленной на концах, под действием внешней силы с плотностью приводится к решению уравнения.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t)$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=u_1(x)$$

и граничных условиях

.

где – линейная плотность струны.

Решение этой задачи ищется в виде суммы

,

где:

1) – решение неоднородного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t)$

с граничными условиями $u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0$

и начальными условиями

$$u\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0$$

2) – решение однородного уравнения

с граничными $u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0$ условиями
и начальными условиями $u|_{t=0}=u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x)$
Найдем . Для этого необходимо решить уравнение

Формулировка задачи полностью совпадает с уравнением гиперболического типа, решенным методом Фурье в первой задаче этой статьи. Решением является функция:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+D_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

с коэффициентами

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi \quad D_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l u_1(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$$

Следует так же заметить, что при решении задачи были найдены собственные значения $\lambda=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$
и собственные функции $X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$.

2. Найдем . Для этого нужно решить неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g(x,t)$$

Решение ищется в виде: $v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g(x,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right)=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right)+g(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+g(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=g(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2T_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=g(x,t)$$

Разложим функцию $g(x,t)$ в ряд Фурье по синусам в интервале :

$$g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

Сравниваем два последних равенства :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2T_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

Отсюда можно составить дифференциальное уравнение:

$$T_n''(t)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2T_n(t)=g_n(t)$$, где $$g_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l g(\xi,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$$

Причем решать это уравнение нужно при нулевых начальных условиях $T_k(0)=0,\quad T_k'(0)=0,\quad (k=1,2,3...)$.

В задачнике В.С. Владимирова сказано (и это правда), что решение этого уравнения при таких начальных условиях можно записать в виде:

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t g_n(\tau)\sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)\right)d\tau.$$

Замечание: Подробно получение этой формулы не рассматривается, т.к. если при решении конкретной задачи получилось уравнение вида, то следует просто применить эту формулу, а если получилось уравнение другого вида, то каждый конкретный случай нужно решать индивидуально.

Вывод:

Решение исходной задачи представляется в виде:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+D_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

Построим график функции. При этом x=const , t – изменяется, l=2 м, h=1 м, a=2,3 (для золота).Возьмем t=0 с, t=1 с, t=2 с, t=3 с. Построим графики:

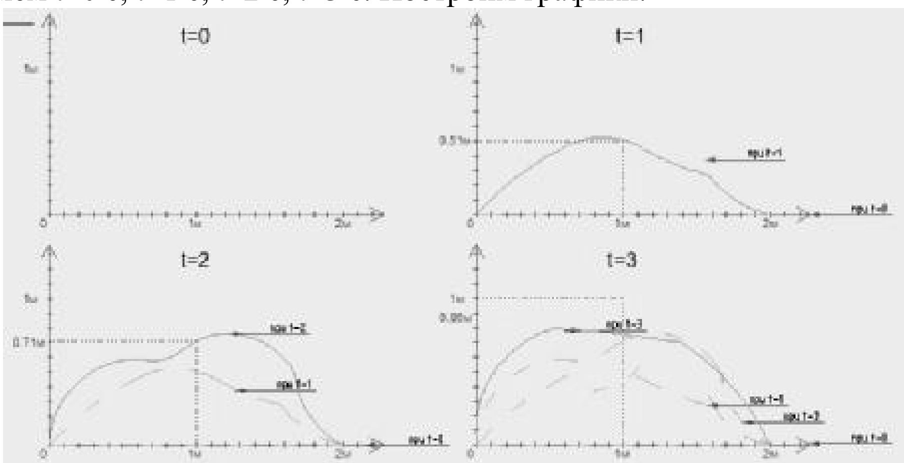

График 2

ВЫВОДЫ

Изучив уравнение струны, с точки зрения математической физики, мы пришли к выводу, что на поведение струны влияют Краевы условия, материал струны. В зависимости от них можно отследить поведение струны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арманович И.Г. – Уравнения математической физики;
2. Пискунов Н.С. – Дифференциально и интегральное исчисление (том 2).

УДК 929

НЕЗАБЫВАЕМЫЙ СЛЕД В ИСТОРИИ НАУКИ

Глазкова Ю.В., студентка группы ПГС-203, Волосович О.В., профессор
Национальная академия природоохранного и курортного строительства

Показан вклад в развитие науки сопротивления материалов профессора Тимошенко С.П. А также знакомство с биографическими данными ученого.

Достижения в науке, сопротивление материалов, основоположник, профессор кафедры, научные работы.